

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Físicas



*Aspectos cuánticos de la sincronización de osciladores
armónicos acoplados en presencia de disipación*

*Quantum aspects of synchronization of harmonic
coupled oscillators in presence of dissipation*

por Gonzalo Manzano Paule

`lalo@ifisc.uib-csic.es`

Dirigido por:

Roberta Zambrini

*IFISC (UIB-CSIC), Instituto de Física Interdisciplinar y Sistemas Complejos,
UIB Campus, E-07122 Palma de Mallorca, Spain*

`roberta@ifisc.uib-csic.es`

Trabajo de Fin de Máster del Máster en Física Fundamental
Septiembre de 2011

Resumen:

En este trabajo de Fin de Máster estudiamos el fenómeno de la sincronización en sistemas de osciladores armónicos cuánticos acoplados en presencia de disipación. Un primer estudio de dos osciladores con diferentes frecuencias enseña que, independientemente de la intensidad del acoplamiento, los osciladores no sincronizan en presencia de entornos independientes. La condición que posibilita la emergencia de sincronización espontánea es la presencia de un entorno común. Asociada a este fenómeno se encuentra una mayor robustez de las correlaciones cuánticas entre osciladores, dependiendo de la relación entre sus diferentes frecuencias naturales y el valor de la constante de acoplamiento entre ellos. Extendiendo el análisis al caso más complejo de N osciladores, determinamos las condiciones más generales necesarias para la aparición de este fenómeno a través de la relación entre las tasas de disipación de los automodos. Esta descripción nos permite establecer una correspondencia clara con la conservación de las correlaciones, centrándonos en el análisis de la dinámica del entrelazamiento y discord. El estudio del caso de tres osciladores nos permite identificar la rica tipología de comportamientos que pueden surgir y determinar la influencia de las condiciones de contorno (cadena abierta o cerrada). Demostramos además la existencia de regiones de parámetros (así como la manera de obtenerlas en cadenas genéricas) donde el sistema no termaliza, dando lugar a una conservación asintótica de las correlaciones. En este contexto calculamos analíticamente el entrelazamiento entre osciladores resonantes en los extremos de la cadena abierta, obteniendo un diagrama de fases para su existencia asintótica dependiendo de la temperatura y compresión del estado inicial del sistema. Encontramos en este diagrama que el entrelazamiento se podrá mantener asintóticamente hasta altas temperaturas.

Palabras clave:

Sincronización, Discord, Entrelazamiento, Decoherencia, Baño común, Disipación, Cadenas de osciladores, Sistemas abiertos, Información cuántica

Abstract:

In this Master Thesis work we study the phenomenon of synchronization in coupled quantum harmonic oscillators systems in the presence of dissipation. A first study of two oscillators with different frequencies shows that independently on the coupling strength, the oscillators do not synchronize in the presence of independent environments. The enabling condition for the emergence of spontaneous synchronization is the presence of a common environment. Associated with this phenomenon there are more robust quantum correlations between oscillators, depending on the relationship between their natural frequencies and coupling strength. Extending the analysis to the more complex case of N oscillators, we determine the general conditions for the emergence of this phenomenon through the relationship among the eigenmodes rates of dissipation. This description makes it possible to establish a clear correspondence with the preservation of the correlations, where we focus on the analysis of entanglement dynamics and discord. The study of the case of three oscillators allows us to identify a rich variety of properties and to determine the influence of different boundary conditions (open or closed chain). Furthermore we demonstrate the existence of parameters regions (also showing how to get them in generic chains) where the system does not thermalize, giving rise to an asymptotic conservation of correlations. In this context we analytically derive the entanglement between resonant oscillators at the ends of the open chain, obtaining a phase diagram for its asymptotic existence depending on the equilibrium temperature and squeezing of the initial state of the system. We find in this diagram that asymptotic entanglement can be maintained up to high temperatures.

Keywords:

Synchronization, Discord, Entanglement, Decoherence, Common bath, Dissipation, Harmonic chains, Open systems, Quantum information

Índice de contenidos

I. Introducción	1
A. Sincronización clásica y cuántica	1
B. Correlaciones cuánticas	1
C. Dos osciladores armónicos en presencia de disipación	2
1. Sincronización mutua en un transitorio	2
2. Robustez de las correlaciones frente a la disipación	3
II. Cadenas de osciladores acoplados en presencia de disipación	3
A. El modelo general	3
B. Ecuación maestra en la base de los automodos del sistema	4
C. Aproximación de onda rotante y tasas de relajación efectivas	5
D. Métodos para el análisis dinámico	5
III. Tres osciladores armónicos disipando en un entorno común	6
A. Configuración en cadena abierta	6
1. Sincronización colectiva	6
2. Conservación de las correlaciones cuánticas	7
3. Entrelazamiento asintótico para osciladores externos resonantes	8
B. Configuración en cadena cerrada	9
IV. Conclusiones y perspectivas de futuro	10
Bibliografía	11

Aspectos cuánticos de la sincronización de osciladores armónicos acoplados en presencia de disipación

Gonzalo Manzano Paule dirigido por Roberta Zambrini

I. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es el estudio del fenómeno de la sincronización en un sistema cuántico así como la identificación de efectos no clásicos relacionados con este fenómeno. En esta introducción (Sec.I) definiremos la naturaleza de la sincronización, los indicadores necesarios para caracterizar efectos puramente cuánticos, como el entrelazamiento o el discord, y describiremos el caso de dos osciladores armónicos, haciendo énfasis en los efectos de la disipación. En esta sección se da una perspectiva general de los resultados de la Ref.[1], la cual también forma parte del presente trabajo de Fin de Máster. En las siguientes secciones abordaremos el problema haciendo uso de un formalismo general para cadenas de N osciladores (Sec.II) y trataremos en detalle el caso de tres osciladores (Sec.III), el cual nos permitirá introducir otro elemento en el análisis de cadenas, el papel de las condiciones de contorno.

A. Sincronización clásica y cuántica

La sincronización es en general entendida como un ajuste de ritmos entre objetos oscilantes debido a su débil interacción y ha sido observada en un amplio rango de sistemas físicos, químicos y biológicos bajo una gran variedad de circunstancias [2]. En algunos casos, la sincronización es inducida por la presencia de un forzamiento externo que actúa como marcapasos guiando la dinámica del sistema, fenómeno también conocido como arrastre (“entrainment”). En otras ocasiones, aparece espontáneamente como un comportamiento colectivo consecuencia de la interacción entre los elementos que lo conforman. Este último caso es el más relevante desde el punto de vista de los sistemas complejos en tanto que aparece como un fenómeno emergente que tiene lugar a pesar de las diferencias naturales entre los elementos. La sincronización colectiva, cuya descripción más simple puede ser realizada en términos de osciladores auto-sostenidos acoplados, se presenta en circuitos de relajación de osciladores, redes neuronales, células de marcapasos cardíacos o luciérnagas que lucen al unísono entre otros [3]. Un ingrediente clave para la existencia de sincronización colectiva es la presencia de disipación, la cual es responsable de colapsar las trayectorias del sistema en un subespacio de menor dimensión del espacio de fases.

En el mundo cuántico la sincronización se ha observado y estudiado en el contexto del arrastre inducido por un forzamiento externo en diferentes tipos de sistemas [4–7]. Sin embargo la sincronización colectiva o mutua

tiene mayores dificultades para ser caracterizada debido a que en general, en el caso de osciladores lineales, la disipación produce la muerte de las oscilaciones después de un cierto tiempo. Por otra parte, la extensión al caso cuántico de sistemas con osciladores de fase no-lineales no permite un tratamiento analítico. Tanto en este trabajo como en la Ref.[1], se dan los primeros pasos hacia la comprensión de la sincronización colectiva en el caso de osciladores armónicos cuánticos en conexión con las correlaciones asociadas a este fenómeno.

B. Correlaciones cuánticas

El entrelazamiento es una de las características exclusivas de la mecánica cuántica y es el responsable de algunos de sus aspectos más anti-intuitivos. Corresponde a una medida de las correlaciones cuánticas entre sistemas compuestos (no-separables) y ha sido ampliamente estudiado no sólo desde un punto de vista fundamental [8], sino por ser una asombrosa fuente de recursos en tareas de información y computación cuánticas [9]. Su caracterización ha sido extendida también a estados gaussianos a través de la definición de medidas computables como la negatividad logarítmica [10, 11], que cuantifica la negatividad en el espectro de la matriz de densidad transpuesta parcial ρ^{TA} de un sistema bipartito A,B:

$$E_N(\rho) = \log \|\rho^{TA}\| \quad , \quad \|\rho\| = \text{Tr} \sqrt{\rho^\dagger \rho} \quad (1)$$

es decir, cuan no físico es un estado del sistema compuesto AB al implementar una inversión temporal en el estado parcial de uno de los subsistemas.

Otros autores [12, 13], sin embargo, han considerado la existencia de correlaciones cuánticas más allá del entrelazamiento, presentes también en estados separables, como es el caso del *discord*. El *discord cuántico* está recibiendo un gran interés recientemente y su utilidad en tareas de computación cuántica ha sido reconocida [14, 15]. Su definición viene dada a través de la minimización, sobre todas las posibles medidas, de la diferencia entre dos expresiones para la información mutua (clásicamente equivalentes a través de la regla de Bayes) al ser extendidas al caso cuántico [12], resultando:

$$\delta(\rho) = \min_{\{\Pi_i\}} [S(\rho_B) - S(\rho) + S(\rho_A|\{\Pi_i\})] \quad (2)$$

con S la entropía de Von Neumann, $S(\rho_A|\{\Pi_i\})$ la entropía condicional, $\{\Pi_j\}$ será un conjunto de proyectores ortogonales y $\rho_{A(B)}$ el operador densidad reducido del subsistema $A(B)$. Minimizar el discord corresponderá a

encontrar la medida que disturba en menor grado el estado cuántico total y al mismo tiempo, nos permite extraer la mayor información acerca de uno de los subsistemas. El discord representa un indicador de las correlaciones cuánticas entre estados mezcla e incluye el entrelazamiento (ambas cantidades coinciden para estados puros). Se han obtenido expresiones analíticas para su cálculo en sistemas bipartitos formados por qubits [16, 17] o estados gaussianos en sistemas de variable continua [18, 19], como es el caso de osciladores armónicos disipativos.

C. Dos osciladores armónicos en presencia de disipación

El sistema más sencillo para comenzar el estudio de la sincronización y su eventual relación con correlaciones cuánticas es el formado por dos osciladores armónicos, acoplados entre sí y en presencia de disipación. Este tipo de sistema se puede implementar experimentalmente, como es el caso de las estructuras nanoelectromecánicas (NEMS) y los dispositivos optomecánicos [20–24], así como las trampas de iones separadas, en las que se ha investigado recientemente su acoplamiento directo [25, 26].

El estudio de la sincronización para dos osciladores acoplados es el objeto de la Ref.[1], cuyos resultados principales se destacan en este apartado tras introducir algunos de los conceptos previos más relevantes. El Hamiltoniano del sistema aislado en unidades naturales ($\hbar = \kappa_B = 1$) y masas unitarias es:

$$H_S = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{1}{2}(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2) + \lambda x_1 x_2, \quad (3)$$

donde se exige que el potencial sea atractivo mediante la condición $|\lambda| < \omega_1 \omega_2$, de modo que los estados del sistema sean ligados. Los efectos disipativos se modelan en el contexto del formalismo de las ecuaciones maestras para el movimiento browniano cuántico, ampliamente estudiado en la literatura [27–31]. En general cada unidad del sistema se acopla a un baño térmico de osciladores armónicos, hablándose de baños separados (SB). Este tipo de entorno se ha utilizado, por ejemplo, para modelar modos del campo electromagnético en cavidades ópticas [32]. Sin embargo en ocasiones la disipación tiene lugar sólo en algunos grados de libertad no afectando a todo el espacio de Hilbert [33], como es el caso de un baño común (CB) para todas las partes del sistema. Este último ha sido estudiado para qubits [34, 35] y más recientemente en el caso de dos osciladores armónicos idénticos [36, 37].

La dinámica del sistema viene profundamente determinada por el tipo de disipación. Mientras que para baños separados el entrelazamiento entre osciladores desaparece en un tiempo finito (muerte súbita del entrelazamiento [38]) aun decayendo la coherencia sólo asintóticamente, en el caso de baño común puede persistir asintóticamente. De hecho, existirán diferentes fases del entrelazamiento dependiendo de la temperatura de equilibrio del baño y

la compresión (squeezing) del estado inicial [37]. Tal y como se señala en estos trabajos, la condición de resonancia entre osciladores produce el acoplamiento de sólo uno de los automodos del sistema al baño térmico, manteniéndose el segundo fuera del alcance de la disipación. Esta condición resulta determinante en la dinámica del sistema, ya que la diversidad entre osciladores destruye el entrelazamiento asintótico, a menos que no se compense con diferentes acoplamientos al baño [39].

El objetivo de la Ref.[1] es identificar las condiciones bajo las cuales se observa la emergencia de sincronización entre dos osciladores, considerándose diferentes entornos (baños común y separados) y rangos para las frecuencias (no resonantes) y la intensidad de acoplamiento entre osciladores. Debido a la forma cuadrática del Hamiltoniano del sistema, los estados gaussianos preservan su carácter durante la evolución y así los primeros y segundos momentos de los operadores x_i, p_i , usados para hallar la sincronización entre los osciladores, serán suficiente para caracterizar completamente el estado y la dinámica del sistema.

1. Sincronización mutua en un transitorio

Nuestro análisis enseña que en el caso de CB, partiendo de un estado gaussiano arbitrario y al cabo de un tiempo transitorio, la evolución dinámica de los osciladores queda sincronizada para un amplio rango de desintonías (ω_2/ω_1) y acoplamientos entre los osciladores (λ). El tiempo necesario para alcanzar la sincronización será menor para osciladores con frecuencias similares y proporcionalmente mayor al considerar acoplamientos más débiles. Por el contrario, en el caso SB este fenómeno no tiene lugar, independientemente de la relación entre las frecuencias y la intensidad del acoplamiento λ .

Este resultado se puede comprender a través de la evolución temporal de los segundos momentos. De hecho, calculando los diez autovalores, $\{\mu_i\}$, de la matriz que describe su evolución (matriz dinámica), observamos las profundas diferencias entre ambos casos. Debido a la disipación, las partes reales de estos autovalores serán negativas y mientras que para el caso de un CB existirá una gran diferencia entre ellas (en la región de parámetros donde existe sincronización), para SB no ocurre. Esta separación de escalas producirá que, pasado un tiempo transitorio, el automodo menos amortiguado domine la dinámica y determine la frecuencia de todos los momentos del sistema.

Una aproximación analítica de las escalas temporales se halla eliminando la parte oscilante de la ecuación maestra en la base de los automodos, como se detalla en la Ref.[1]. Bajo esta aproximación (de onda rotante) los automodos evolucionan de manera independiente y las tres diferentes partes reales de los (diez) autovalores $\{\mu_i\}$, coincidirán con los (dos) coeficientes Γ_{ii} de la ecuación maestra escrita en la base de los automodos, junto con su promedio, salvo cambio de signo (Ver Sec.II C). Asimismo

la frecuencia de sincronización vendrá determinada por la parte imaginaria (no nula) correspondiente al autovalor con parte real (Γ_{ii}) más próxima a cero.

2. Robustez de las correlaciones frente a la disipación

Establecidas las condiciones de sincronización, en la Ref.[1] analizamos la dinámica de las correlaciones cuánticas e información compartida por los osciladores con el objetivo de identificar posibles conexiones con el fenómeno de sincronización espontánea. Los resultados muestran que en las regiones donde se produce una pronta sincronización (para CB), la pérdida de correlaciones es notablemente más lenta, alcanzándose un “plateau” en la evolución temporal tanto de la información mutua como del discord. Sin embargo para SB no sucede lo mismo, observándose un rápido decaimiento de las correlaciones hacia las propias del estado térmico. Estos hechos se explican a través de la mencionada separación de escalas temporales, siendo el automodo menos amortiguado el responsable de que se mantengan las correlaciones robustas.

En definitiva, el baño térmico común juega un papel fundamental en las propiedades dinámicas del sistema, permitiendo la emergencia de sincronización y la robustez de las correlaciones cuánticas entre osciladores. La identificación de este fenómeno para el caso de dos osciladores, tiene un carácter suficientemente fundamental como para esperar su ocurrencia también en sistemas más complejos como cadenas de osciladores.

II. CADENAS DE OSCILADORES ACOPLADOS EN PRESENCIA DE DISIPACIÓN

En el caso de dos osciladores, la presencia de un baño común producía la emergencia de sincronización para osciladores diferentes (no resonantes) a través de una disipación desigual de los dos automodos del sistema. Sin embargo la generalización a cadenas no es inmediata debido a la multiplicidad de automodos. En este contexto cabe preguntarse en qué condiciones hay sincronización para una pareja de osciladores de la cadena en particular o para todos simultáneamente. Asimismo, en el caso de dos osciladores la existencia de un “plateau” en la dinámica del discord y de la información mutua se debe a la presencia de un automodo que disipa lentamente frente a otro que se relaja en tiempos breves. La generalización a cadenas introduce la cuestión de si las correlaciones pueden mantenerse robustas sólo entre parejas de osciladores directamente acoplados (primeros vecinos) o también entre osciladores no acoplados directamente, pero sí a través de los otros osciladores de la cadena y el entorno.

Este apartado lo dedicaremos a deducir y desarrollar las herramientas analíticas necesarias en el caso general de una cadena de osciladores armónicos disipativos.

A. El modelo general

Consideramos N osciladores con frecuencias diferentes ω_i , asumiendo por simplicidad la misma constante de acoplamiento, λ , entre todas las parejas de osciladores acoplados. El Hamiltoniano del sistema será:

$$H_S = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2} \omega_i^2 x_i^2 + \lambda x_i x_{i+1}, \quad (4)$$

considerándose aquí para cadena cerrada $x_{N+1} = x_1$ y para cadena abierta $x_{N+1} = 0$. Para el modelado del entorno disipativo utilizaremos tanto el caso de N baños térmicos equivalentes conectados a cada oscilador por separado (SB), como el de un único baño común acoplado al centro de masas de los osciladores (CB). Cada baño térmico consiste en una colección de infinitos osciladores armónicos independientes, siendo el Hamiltoniano del entorno:

$$H_B = \sum_k \sum_{\alpha} \frac{P_{\alpha}^{(k)2}}{2} + \frac{1}{2} \Omega_{\alpha}^{(k)2} X_{\alpha}^{(k)2} \quad (5)$$

donde el índice α recorre los infinitos modos de los baños y k recorre los N baños en el caso SB. Para el caso CB será $k = 1$ ya que existirá un único baño térmico. El Hamiltoniano de interacción sistema-baño para el caso SB, viene dado por:

$$H_I^{SB} = \sum_{k=1}^N x_k \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^{(k)} X_{\alpha}^{(k)} \equiv \sum_{k=1}^N x_k B_k \quad (6)$$

donde los B_k representan los operadores de los N baños. En el caso CB resulta que $B_k = B \quad \forall k$ y el Hamiltoniano de interacción será factorizable:

$$H_I^{CB} = B \sum_{k=1}^N x_k \quad (7)$$

Esta propiedad será fundamental en el posterior desarrollo del formalismo y dará lugar a profundas consecuencias.

Los coeficientes λ_{α} son las constantes de acoplamiento para cada uno de los modos del entorno y se determinan a partir de la densidad espectral del baño, $J(\Omega) = \sum_{\alpha} (\lambda_{\alpha}^2 / \Omega_{\alpha}) \delta(\Omega - \Omega_{\alpha})$, que mide la cantidad de osciladores de una frecuencia dada que se acoplan al sistema con una intensidad específica. En este trabajo consideraremos un entorno Ohmico y un continuo de osciladores con una densidad espectral dada por:

$$J(\Omega) = \frac{2\gamma}{\pi} \Omega \Theta(\Lambda - \Omega) \quad (8)$$

que corresponde a una función triangular, donde γ representa el acoplamiento con el baño y Λ es la máxima frecuencia presente en el entorno (frecuencia de corte). La escala temporal asociada a la respuesta del entorno queda determinada por Λ^{-1} . En el presente trabajo se considerará siempre un corto tiempo de respuesta con $\Lambda \gg \omega_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$.

B. Ecuación maestra en la base de los automodos del sistema

Mediante el uso de un procedimiento estándar podemos obtener la ecuación maestra tanto para CB como para SB, a segundo orden de expansión en el acoplamiento baño-sistema con las aproximaciones de Born y Markovianas usuales [29]. En particular, el análisis en el caso de dos osciladores [39] nos enseña que el uso de la base de los automodos del sistema facilitará la descripción e interpretación de la dinámica y del acoplamiento entre sistema y baño.

Los automodos de H_S obtenidos aplicando una transformación canónica a los operadores de posición y momento del sistema se expresan en manera general como

$$Q_i = \sum_{j=1}^N f_{ij} x_j \quad P_i = \sum_{j=1}^N f_{ij} p_j \quad (9)$$

siendo f la matriz de cambio de base. Llamaremos asimismo Ω_i a la autofrecuencia correspondiente al modo $i \in \{1, \dots, N\}$. Mientras que el Hamiltoniano del sistema aislado (4) queda diagonalizado, el término de interacción se ve modificado mediante el cambio de coordenadas, adoptando la siguiente forma para el caso de SB:

$$H_I^{SB} \equiv \sum_{j=1}^N Q_j B'_j \quad (10)$$

donde $B'_j = \sum_{k=1}^N f_{jk} B_k$. Por otra parte para CB obtendremos que:

$$H_I^{CB} = B \sum_{j=1}^N \kappa_j Q_j \quad (11)$$

donde $\kappa_j = \sum_{k=1}^N f_{jk}$ y en adelante recibirán el nombre de acoplamientos efectivos. En este caso (CB), cada automodo j estará acoplado al baño mediante un sólo peso κ_j , que resulta ser la suma de las componentes del autovector j -ésimo correspondiente. En la Fig.1 se pueden observar esquemáticamente las dos situaciones SB y CB. Naturalmente la evolución temporal de los automodos no será independiente, en tanto que los automodos seguirán estando acoplados entre sí a través de los baños térmicos.

La evolución de la matriz densidad del sistema tanto para CB como para SB que se obtiene será:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = & -i[H_S, \rho(t)] - \frac{1}{2} \sum_{i,j} i\Gamma_{ij}[Q_i, \{P_j, \rho(t)\}] + \\ & + D_{ij}[Q_i, [Q_j, \rho(t)]] - F_{ij}[Q_i, [P_j, \rho(t)]] \end{aligned} \quad (12)$$

donde los coeficientes Γ_{ij} serán los responsables de la relajación del sistema, mientras que los D_{ij} y F_{ij} (coeficientes de difusión y difusión anómala respectivamente) determinarán las propiedades del estado asintótico [37].

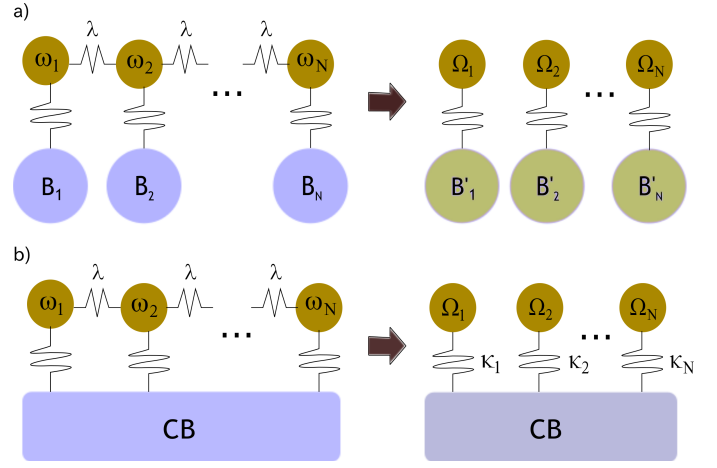


Figura 1. Esquema del acoplamiento del sistema para a) SB y b) CB. A la izquierda se muestra el sistema de osciladores antes del cambio $x_i, p_i \rightarrow Q_i, P_i$ y a la derecha el sistema equivalente en la base de los automodos. Mientras que en el caso de SB cada automodo está acoplado a los N baños ($B'_j = \sum_{k=1}^N f_{jk} B_k$), en el caso de CB cada automodo se acopla al baño común a través de uno de los acoplamientos efectivos $\kappa_j = \sum_{k=1}^N f_{jk}$.

Su forma vendrá dada por:

$$\Gamma_{ij} = \sum_{k=1}^N \xi_{ijk} \frac{\pi}{2} \frac{J(\Omega_k)}{\Omega_k} \quad (13)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \xi_{ijk} \frac{\pi}{2} J(\Omega_k) \coth\left(\frac{\Omega_k}{2T}\right) \quad (14)$$

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^N \xi_{ijk} \frac{\gamma}{\pi} (I_+(\Omega_k, \Lambda, T) + I_-(\Omega_k, \Lambda, T)) \quad (15)$$

donde tendremos que debido a las distintas expresiones del término de interacción sistema-baño, para SB: $\xi_{ijk} = f_{ik} f_{jk}$ mientras que para CB: $\xi_{ijk} = \kappa_i \kappa_j \delta_{jk}$. Por otra parte hemos definido $I_{\pm}(\Omega_k, \Lambda, T) = \text{V.P.} \int d\Omega \Theta(\Lambda - \Omega) \frac{\Omega}{\Omega_k \pm \Omega} \coth\left(\frac{\Omega}{2T}\right)$, siendo V.P. el valor principal de Cauchy y recordamos que Ω_k son las autofrecuencias de H_S .

Comparando las expresiones para los dos tipos de entorno considerados (con sus respectivos ξ_{ijk}), observamos que a diferencia del caso SB, en el caso CB los coeficientes se pueden escribir de manera factorizable. Se separan así los efectos producidos por la topología y características del sistema aislado (recogidos en los κ_i), de los producidos por las propiedades del baño térmico, como el tiempo de memoria del entorno (Λ) y la temperatura de equilibrio (T). En concreto nótese que para este caso los coeficientes responsables de la relajación se simplifican a:

$$\Gamma_{ij} = \gamma \kappa_i \kappa_j \quad (16)$$

para la densidad de estados triangular considerada (Eq.(8)) ya que $\Omega_k \ll \Lambda \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}$.

A partir de la ecuación maestra obtenemos las ecuaciones para la evolución temporal de los segundos momentos, las cuales se pueden escribir de una forma compacta mediante:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathcal{M}\mathbf{R} + \mathbf{N}. \quad (17)$$

donde el vector \mathbf{R} contiene los $m = 2N^2 + N$ segundos momentos de los automodos, la matriz \mathcal{M} condensa la información sobre la dinámica del sistema y el vector \mathbf{N} determina los valores estacionarios de los segundos momentos a tiempos infinitos, cuando el sistema alcanza el estado de equilibrio (dado por $\dot{\mathbf{R}} = 0$).

C. Aproximación de onda rotante y tasas de relajación efectivas

Con el fin de facilitar el análisis de la dinámica e identificar las escalas temporales de relajación del sistema, eliminaremos todos los términos oscilantes de la ecuación maestra en imagen de interacción con respecto a $H_0 = H_S + H_B$. La aproximación (de onda rotante) será válida cuando las autofrecuencias $\Omega_i \neq \Omega_j \quad \forall i \neq j \in \{1, \dots, N\}$ y además tendremos que exigir que $\gamma \ll \omega_i$.

Tras la operación, volviendo a la imagen de Schrödinger, la ecuación maestra (12) se convertirá en:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = & -i[H_S, \rho(t)] - \\ & -\frac{1}{4} \sum_n i\Gamma_{nn} ([Q_n, \{P_n, \rho(t)\}] - [P_n, \{Q_n, \rho(t)\}]) + \\ & + D_{nn} \left([Q_n, [Q_n, \rho(t)]] - \frac{1}{\Omega_n^2} [P_n, [P_n, \rho(t)]] \right) \end{aligned} \quad (18)$$

donde los automodos quedan completamente desacoplados, estando sujetos a canales independientes de disipación. Los autovalores complejos de la matriz dinámica \mathcal{M} , en esta aproximación de onda rotante, se pueden calcular analíticamente:

$$\{\widetilde{\mu}_k\} = \left\{ -\frac{\Gamma_{ii} + \Gamma_{jj}}{2} \pm i|\Omega_i \pm \Omega_j| \right\} \quad (19)$$

donde $i \leq j \in \{1 \dots N\}$ y $k \in \{1 \dots m\}$ siendo m el número de segundos momentos y la tilde nos recuerda que se trata de los autovalores aproximados. En efecto la parte real de los autovalores viene dada por los coeficientes Γ_{ii} de la ecuación maestra (13), a los que en adelante llamaremos coeficientes de relajación efectivos. Estos determinarán una escala temporal para la cual los segundos momentos de Q_i, P_i se relajen, mientras que las partes imaginarias determinarán la frecuencia de las oscilaciones. La aproximación efectuada reproduce muy bien los autovalores exactos tal y como se muestra en la Fig.2, con una precisión del 0,1 % en el caso de $N = 2$.

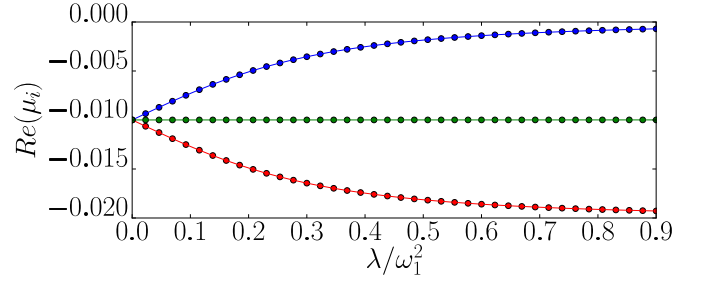


Figura 2. Comparativa de las tres diferentes partes reales de los autovalores de la matriz dinámica en aproximación de onda rotante $\{\widetilde{\mu}_k\}$ (puntos) y los exactos $\{\mu_k\}$ (línea continua) en el caso de CB, para $\omega_2/\omega_1 = 1,31$. Los parámetros baño térmico utilizados en la simulación han sido $T = 10 \omega_1$ y $\gamma = 0,01 \omega_2$.

D. Métodos para el análisis dinámico

Los resultados obtenidos nos permiten relacionar el comportamiento del sistema frente a la disipación directamente con la forma de los autovectores de H_S . En particular el caso CB es especialmente interesante dado que la dependencia de los coeficientes de relajación efectivos (Γ_{ii}) con la matriz de cambio de base f aparece factorizada a través de los coeficientes de acoplamiento κ_i . De hecho utilizando la ecuación (13) tendremos que el cociente entre dos coeficientes de relajación efectivos se puede expresar como:

$$\frac{\Gamma_{ii}}{\Gamma_{jj}} = \frac{\kappa_i^2 J(\Omega_i) \Omega_j}{\kappa_j^2 J(\Omega_j) \Omega_i} \equiv \frac{\kappa_i^2}{\kappa_j^2} \quad (20)$$

donde la última igualdad se cumple para la densidad de estados considerada (siguiendo la Eq.(16)). De este modo al comparar los acoplamientos κ_i^2 para distintas regiones de parámetros obtendremos una medida de la separación de escalas de disipación. Cabe mencionar que los promedios de los coeficientes de relajación efectivos no jugarán un papel significativo a estos efectos. La existencia de diferentes escalas temporales para la relajación de los automodos será la responsable de producir la emergencia de sincronización entre osciladores, la conservación asintótica del entrelazamiento o la existencia de un “plateau” en la dinámica del discord.

Para efectuar el análisis cuantitativo de la sincronización entre parejas de osciladores se utilizará el siguiente indicador típico definido para dos funciones genéricas $f(t)$ y $g(t)$, que aplicaremos posteriormente a los segundos momentos $\langle x_i^2 \rangle$ para $i = 1 \dots N$:

$$C_{f,g}(t, \Delta t) = \frac{\int_t^{t+\Delta t} dt' (f - \bar{f})(g - \bar{g})}{\sqrt{\Delta f \Delta g}} \quad (21)$$

donde $\Delta f = \int_t^{t+\Delta t} dt' (f - \bar{f})^2$ y $\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' f(t')$. Cuando las evoluciones estén sincronizadas obtendremos $|C| \sim 1$ ya sea en fase o antifase ($C > 0$ ó $C < 0$), mientras que para dinámicas muy diferentes obtendremos un valor de C próximo a cero.

III. TRES OSCILADORES ARMÓNICOS DISIPANDO EN UN ENTORNO COMÚN

A continuación presentamos los resultados del análisis de una cadena de tres osciladores acoplados en presencia de disipación. Nos centraremos en el caso de baño común (CB) y consideraremos los dos tipos de configuraciones posibles para la cadena: abierta (Sec.III A) y cerrada (Sec.III B).

A. Configuración en cadena abierta

Particularizando la ecuación (4) para una cadena abierta de $N = 3$ osciladores, obtenemos el Hamiltoniano del sistema, donde ahora la condición de potencial atractivo será:

$$|\lambda| < \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_3^2}} \quad (22)$$

La diagonalización de H_S no será posible en general de una manera analítica, sin embargo existen dos condiciones especiales o ligaduras que permiten su resolución: la resonancia entre los osciladores de los extremos de la cadena, i.e.

$$\omega_1 = \omega_3 \quad (23)$$

o al cumplirse la relación hiperbólica

$$\lambda^2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_3^2 - \omega_2^2) \quad (24)$$

En ambos casos se anulará uno de los (tres) coeficientes de acoplamiento κ_i quedando uno de los automodos desacoplado del baño en H_I (Eq.(11)) y, en consecuencia, no sujeto a disipación.

Un análisis numérico de la relación entre los acoplamientos efectivos más próximos a cero (Eq.(20)) para un amplio rango de parámetros se muestra en la Fig.3. Aquí se identifican las regiones en las que existe una separación de escalas de disipación (zonas blancas), donde uno de los automodos se relajará mucho más lentamente que el resto y dominará la dinámica pasado un tiempo transitorio. Las zonas azules, por el contrario, indican la influencia similar de al menos dos de los automodos (los que más lentamente relajan). Las líneas de puntos y rayas corresponden a los casos donde existe un automodo que no disipa ($\kappa_i = 0$) (Eqs.(23) y (24)).

Al incrementar el acoplamiento entre osciladores (fijado en $\lambda = 0,4 \omega_2^2$ para la Fig.3) obtendremos una región de parámetros más amplia donde existirá separación de escalas alrededor de las ligaduras (líneas de puntos), mientras que ésta se reducirá al considerar acoplamientos más débiles.

1. Sincronización colectiva

Vamos ahora a analizar la sincronización de los segundos momentos entre parejas de osciladores utilizando como condición inicial (separable) el producto de

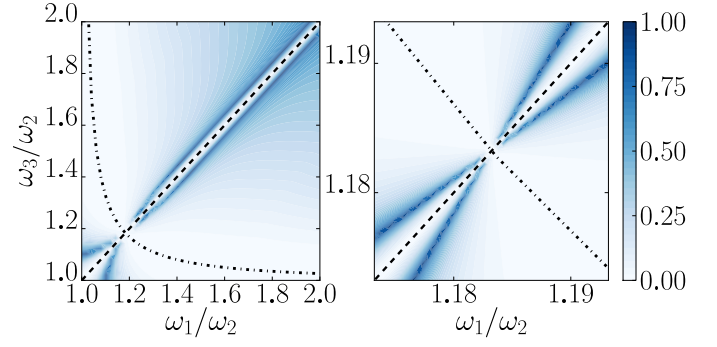


Figura 3. Cociente entre el cuadrado de los dos coeficientes de acoplamiento (κ_i) más próximos a cero para un acoplamiento entre osciladores de $\lambda = 0,4\omega_2^2$. Las zonas blancas revelan una separación de escalas, donde un automodo disipará mucho más lentamente que el resto. Las líneas discontinuas representan la hipérbola (24) y la recta ($\omega_1 = \omega_3$). En ambos casos especiales obtendremos un desacople total entre un automodo y el baño térmico. La condición (22) se verifica en todo el rango de parámetros considerado.

tres estados gaussianos con compresión $r = 2, 3$ y 4 respectivamente. La calidad de la sincronización a lo largo de la evolución dinámica vendrá dada por la función $C(t, \Delta t)$ de la ecuación (21) y se representa en la Fig.4 para un tiempo $t = \min\{t_{Max}, \Gamma_{min}^{-1}\}$ con $t_{Max} \simeq 5000 \omega_2^{-1}$ (tiempo alcanzado en las simulaciones numéricas de la evolución del sistema). Realizando esta elección nos aseguramos de que para cada tupla de parámetros ($\lambda, \omega_1, \omega_2, \omega_3$) el sistema no haya alcanzado el estado térmico y las oscilaciones sean aún significativas. Utilizaremos también el mismo rango de frecuencias y acoplamiento entre osciladores que en la Fig.3.

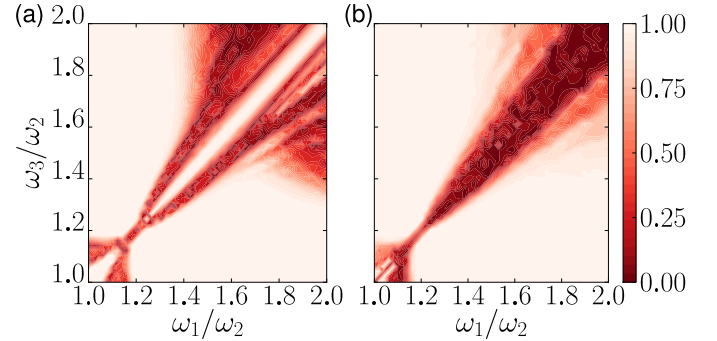


Figura 4. Valor absoluto de la sincronización $|C_{\langle x_i^2 \rangle, \langle x_j^2 \rangle}|$ entre las varianzas en las posiciones para (a) la pareja de osciladores externos y (b) una de las otras dos parejas. Las zonas blancas representan una alta calidad en la sincronización antes de una eventual termalización del sistema. Para el cálculo numérico se ha utilizado $\Delta t = 15 \omega_2^{-1}$ (Eq.(21)) y los parámetros del baño serán en todas las simulaciones $\gamma = 0,07 \omega_2^2$, $\Lambda = 50 \omega_2$ y $T = 10 \omega_2$.

Notemos que en general las zonas donde emerge sincronización coinciden con la existencia de una separación

de escalas entre los acoplamientos efectivos (zonas blancas Fig.4 y Fig.3), mientras que en las zonas donde al menos dos κ_i tienen valores similares (zonas azules Fig.3) no emerge sincronización (zonas rojas Fig.4). Por otra parte, comparando las Figs. 4a y 4b vemos que en una amplia región vecina a la hipérbola (24), la sincronización ocurre para todas las parejas de osciladores (sincronización colectiva), mientras que alrededor de la diagonal (23) la pareja de osciladores externos (Fig.4a) sincroniza aisladamente.

Las condiciones necesarias y suficientes para la sincronización de cada pareja serán tanto la existencia de una separación de escalas en los acoplamientos efectivos κ_i , como la dependencia de los segundos momentos de x_i, p_i del automodo “lento” (para ambos osciladores de la pareja). Formalmente si alguna componente de la matriz de cambio de base f_{ij} se anula, entonces el oscilador (j) no dependerá del automodo (i). Así, en las regiones donde existe sincronización colectiva, sucede que $f_{ij} \neq 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}$ y después de un tiempo transitorio, el automodo que más lentamente disipa marcará la frecuencia de sincronización de todas las parejas (Fig.5a). Sin embargo en las proximidades de la diagonal (23) tendremos que $f_{22} \simeq 0$, por lo que el automodo que disipa más lentamente (Q_2) no influirá en la evolución de los segundos momentos de x_2, p_2 (oscilador central), provocando que las dos parejas que contienen dicho oscilador no sincronicen (Fig.5b).

Un punto especial es aquel en el que se obtienen dos coeficientes de acoplamiento idénticamente nulos, esto es, el punto donde se cumplen simultáneamente las Eqs.(23) y (24). En este caso existirán dos automodos desacoplados del baño térmico con diferentes autofrecuencias ($\Omega_1 = \sqrt{\omega^2 + \lambda}$ y $\Omega_2 = \omega$ respectivamente) que estarán presentes durante toda la dinámica imposibilitando la sincronización (Fig.5c).

La caracterización de la sincronización realizada se refiere, en general, a un tiempo transitorio antes de que el sistema alcance el estado de equilibrio térmico, donde la escala temporal asociada a la relajación de las oscilaciones vendrá dada por Γ_{min}^{-1} . Sin embargo la escala de tiempos asociada a la emergencia de sincronización está determinada por el segundo coeficiente de relajación efectivo más próximo a cero, Γ_{sig}^{-1} . Por tanto, cuando exista separación de escalas, obtendremos un período de tiempo amplio en el cual el sistema permanece activo y sincronizado. La frecuencia de sincronización en los casos en los que se alcanza, vendrá dada de manera aproximada por dos veces la autofrecuencia del automodo que más lentamente disipa ($2\Omega_i$), como se deduce de la Eq.(19).

Sobre los casos especiales (23) y (24), al existir un automodo que no termaliza, las oscilaciones se mantendrán sincronizadas a tiempos arbitrariamente grandes con una amplitud finita. Cabe destacar que en el caso en que se cumple la condición (24) la sincronización emerge entre objetos distintos (los osciladores poseen diferentes frecuencias naturales) de manera no trivial y para todas las parejas, es decir, de manera colectiva.

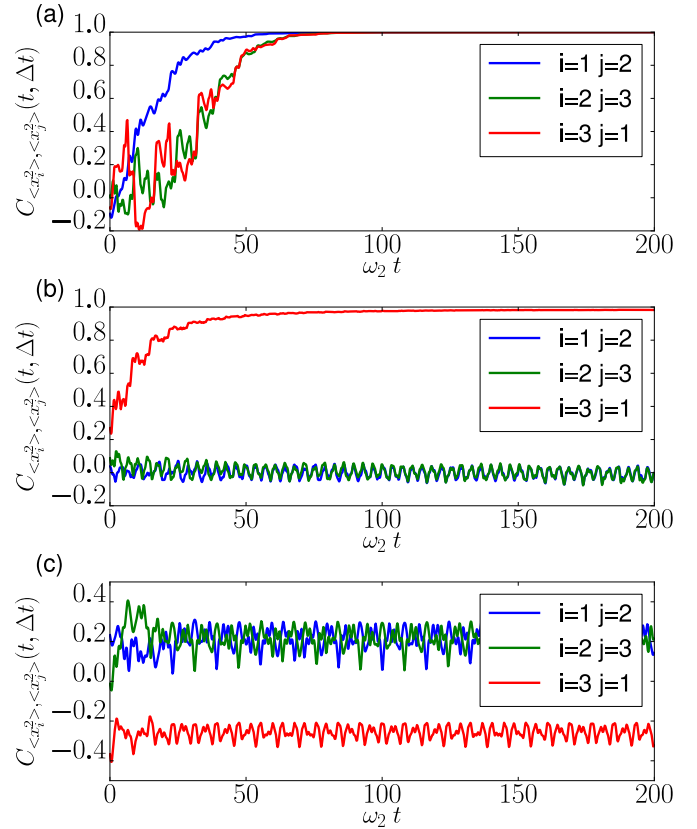


Figura 5. Evolución temporal de la sincronización $C_{\langle x_i^2 \rangle, \langle x_j^2 \rangle}$ de cada pareja (mirar colores) para los casos: (a) próximo a la hipérbola (24) donde sincronizan todas las parejas de osciladores ($\omega_1 = 1,1 \omega_2$ y $\omega_3 = 1,6 \omega_2$), (b) próximo a la diagonal donde únicamente sincronizan los osciladores externos ($\omega_1 = 1,8 \omega_2$ y $\omega_3 = 1,81 \omega_2$) y (c) punto de cruce entre la hipérbola y la diagonal ($\omega_1 = \omega_3 = \sqrt{1,4} \omega_2$) donde dos automodos no disipan. Análogamente a la figura anterior se ha utilizado $\Delta t = 15\omega_2^{-1}$ y $\lambda = 0,4\omega_2^2$.

2. Conservación de las correlaciones cuánticas

A continuación nos centraremos en los aspectos relacionados con la información cuántica compartida entre las parejas de osciladores, conectando con el fenómeno de la sincronización. Consideraremos tanto las correlaciones totales compartidas por parejas de osciladores como las correlaciones puramente cuánticas, a través del discord. Utilizaremos para ello la medida aplicada a sistemas bipartitos de variable continua en estados gaussianos [18, 19] función de la matriz de covarianza V_{AB} , que contiene los 10 segundos momentos de los operadores $x_{A,B}$ y $p_{A,B}$:

$$V_{AB} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma^t & \beta \end{pmatrix} \quad (25)$$

donde α, β, γ son bloques (2x2), conteniendo el primero los segundos momentos del oscilador (subsistema) A, el segundo los correspondientes al oscilador (subsistema) B

y el último los términos mixtos de ambos subsistemas.

De acuerdo con los resultados del caso de dos osciladores (Ref.[1]), también en este caso pasado un corto tiempo transitorio, se obtiene un “plateau” en las dinámicas de la información mutua y discord sólo en las regiones de parámetros en las que emerge sincronización para cada pareja (ver Fig.6a y Fig.6b). En estas zonas donde existe separación de escalas, la pérdida de correlación entre los osciladores será notablemente más lenta, obteniéndose un amplio intervalo temporal en donde las correlaciones se mantienen robustas antes de alcanzar las propias del estado térmico.

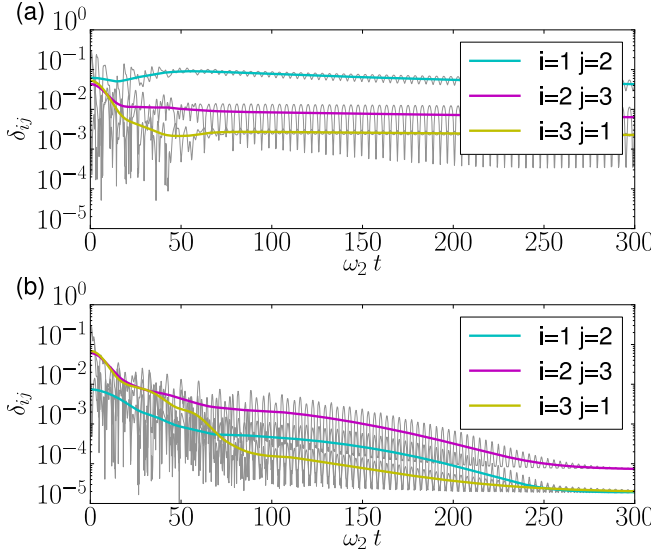


Figura 6. Evolución del discord δ para las distintas parejas (líneas grises) y filtradas las oscilaciones mediante un filtro gaussiano (líneas intensas) para (a) mismo caso que la Fig.5a donde sincronizan todas las parejas de osciladores ($\omega_1 = 1,1 \omega_2$ y $\omega_3 = 1,6 \omega_2$) (b) zona donde no existe sincronización para ninguna pareja ($\omega_1 = 1,9 \omega_2$ y $\omega_3 = 1,6 \omega_2$).

En efecto, la conservación del discord dependerá directamente del valor de los acoplamientos efectivos, obteniéndose un decaimiento más lento cuanto más próximo a cero sea alguno de ellos. De hecho, cuando sean uno o más κ_i nulos (condiciones (23) y/o (24)), obtendremos una conservación asintótica no sólo del discord, sino también del entrelazamiento, tal y como sucede en el caso resonante de dos osciladores [37, 39], es decir, existirán subespacios libres de decoherencia. Sin embargo cuando se verifica (23) sólo se conservan las correlaciones de la pareja resonante (ya que $f_{22} = 0$), mientras que sobre la hipérbola (24) se conservarán las de todas las parejas (así como en el punto de cruce entre ambas condiciones).

3. Entrelazamiento asintótico para osciladores externos resonantes

El cálculo del entrelazamiento en el límite asintótico del caso de osciladores externos resonantes ($\omega_1 = \omega_3 \equiv \omega$)

se puede realizar analíticamente utilizando la negatividad logarítmica para estados gaussianos:

$$E_{\mathcal{N}} = \max\{0, -\log \nu_{-}\} \quad (26)$$

donde ν_{-} es el mínimo autovalor simpléctico de la matriz de covarianza parcialmente transpuesta, definido (para estados gaussianos) como:

$$\nu_{-} = \sqrt{\frac{1}{2}(a + b - 2g - \sqrt{(a + b - 2g)^2 - 4s})} \quad (27)$$

siendo $a = 4\det(\alpha)$, $b = 4\det(\beta)$, $g = 4\det(\gamma)$ y $s = 16\det V$.

Expresaremos los elementos de los bloques α, β y γ de la matriz de covarianza Eq.(25) en función de los segundos momentos de los automodos a través del cambio de base (9). Los automodos acoplados al baño térmico alcanzarán a tiempos suficientemente largos un estado estacionario reflejado en la ecuación (17), mientras que el automodo Q_2 no disipará ($\kappa_2 = 0$) y tendrá por tanto una evolución libre dada por:

$$\begin{aligned} \langle Q_2^2 \rangle(t) &= \frac{1}{2\omega} (e^{2r} \sin^2(\omega t) + e^{-2r} \cos^2(\omega t)) \\ \langle P_2^2 \rangle(t) &= \frac{\omega}{2} (e^{-2r} \sin^2(\omega t) + e^{2r} \cos^2(\omega t)) \\ \frac{\langle \{Q_2, P_2\} \rangle}{2}(t) &= \sinh(2r) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (28)$$

donde hemos usado que $\Omega_2 = \omega$ y por simplicidad se considera el mismo factor de compresión r para el estado inicial (separable) de los osciladores. Efectuando el cambio de base y calculando los determinantes pertinentes, llegamos finalmente a la expresión:

$$\frac{\nu_{-}^2}{2} = g_0 + g_1(t) - \sqrt{(g_0 + g_1(t))^2 - 4(\sigma_a \sigma_b - \sigma_g^2)} \quad (29)$$

donde las funciones g_0 y $g_1(t)$ serán:

$$\begin{aligned} g_0 &= \cosh(2r)(\sigma_a + \sigma_b) \\ g_1(t) &= \sinh(2r)[(\sigma_a - \sigma_b) \cos(2\omega t) - 2\sigma_g \sin(2\omega t)] \end{aligned} \quad (30)$$

y los coeficientes $\sigma_{a,b,g}$ se definen a través de los valores asintóticos de los segundos momentos de los automodos sometidos a disipación:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \omega [C_1^2 \langle Q_1^2 \rangle_{\infty} + C_3^2 \langle Q_3^2 \rangle_{\infty} + 2C_1 C_3 \langle Q_1 Q_3 \rangle_{\infty}] \\ \sigma_b &= \frac{1}{\omega} [C_1^2 \langle P_1^2 \rangle_{\infty} + C_3^2 \langle P_3^2 \rangle_{\infty} + 2C_1 C_3 \langle P_1 P_3 \rangle_{\infty}] \\ \sigma_g &= \frac{1}{2} [C_1^2 \langle \{Q_1, P_1\} \rangle_{\infty} + C_3^2 \langle \{Q_3, P_3\} \rangle_{\infty} + \\ &\quad + C_1 C_3 (\langle \{Q_1, P_3\} \rangle_{\infty} + \langle \{Q_3, P_1\} \rangle_{\infty})] \end{aligned} \quad (31)$$

siendo C_1 , C_2 y C_3 constantes de normalización provenientes de la expresión de los autovalores de H_S :

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{\frac{4\lambda^2}{(\omega_2^2 - \omega^2 - \Delta)^2 + 8\lambda^2}} \\ C_3 &= \sqrt{\frac{4\lambda^2}{(\omega_2^2 - \omega^2 + \Delta)^2 + 8\lambda^2}} \\ \Delta &= \sqrt{(\omega^2 - \omega_2^2)^2 + 8\lambda^2} \end{aligned} \quad (32)$$

Los valores asintóticos de los segundos momentos de los automodos acoplados al baño pueden ser calculados, en primera aproximación, a partir del estado de equilibrio térmico dado por $\rho_{th} = \frac{e^{-\frac{H_S}{T}}}{Tr\{e^{-\frac{H_S}{T}}\}}$:

$$\langle Q_i^2 \rangle_{th} = \frac{1}{2\Omega_i} \coth \frac{\Omega_i}{2T}, \quad \langle P_i^2 \rangle_{th} = \frac{\Omega_i}{2} \coth \frac{\Omega_i}{2T} \quad (33)$$

siendo todos los demás segundos momentos nulos. En este caso $\sigma_g = 0$, eliminándose uno de los términos de la expresión de $g_1(t)$.

El cálculo realizado reproduce los resultados de las simulaciones numéricas con buena exactitud en el límite asintótico para toda la región de parámetros explorada (se muestra un caso particular en la Fig.7). Nótese que este cálculo no será válido en el punto donde la diagonal (23) corta con la hipérbola (24) dado que existirá otro automodo libre de disipación que aportará términos extra a la expresión del entrelazamiento hallada.

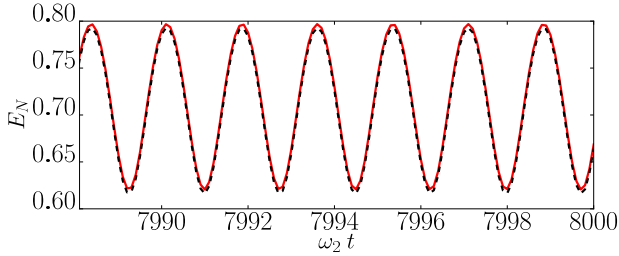


Figura 7. Negatividad logarítmica entre los osciladores externos de la cadena calculada mediante simulación numérica (línea continua) y analíticamente (línea de rayas) a tiempos largos para $\omega = 1,8 \omega_2$ y $\lambda = 0,4 \omega_2$. La temperatura de equilibrio del baño térmico es $T = 10 \omega_2$ y la compresión del estado inicial separable $r = 2$ para todos los osciladores.

Haciendo uso de las expresiones analíticas calculadas, seremos capaces ahora de construir un diagrama de fases para el entrelazamiento (Fig.8), donde se distinguen los comportamientos de muerte súbita (SD), muerte súbita seguida de reavivaciones (SDR) y conservación asintótica (NSD). En el diagrama se observa la robustez del entrelazamiento generado frente a la temperatura de equilibrio del baño y la compresión del estado inicial, existiendo regiones donde se mantiene el entrelazamiento en su fase NSD para altas temperaturas ($T \sim 100 \omega_2$). El comportamiento es cualitativamente similar al caso de dos osciladores con frecuencias resonantes [37].

B. Configuración en cadena cerrada

Cambiar la configuración de las condiciones de contorno de la cadena supone un cambio en la simetría del sistema que afectará notablemente a su comportamiento y propiedades. El Hamiltoniano del sistema corresponderá a la expresión (4) para $N = 3$ y $x_4 \equiv x_1$, donde la

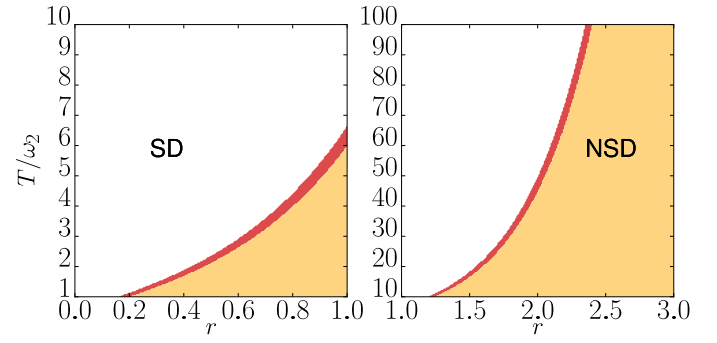


Figura 8. Diagrama de fases para el entrelazamiento entre los osciladores externos para $(\omega_1 = \omega_3 =)\omega = 1,8 \omega_2$ y $\lambda = 0,4 \omega_2^2$ calculado mediante la expresión analítica dada para la negatividad logarítmica E_N . Los colores representan las diferentes fases SD (blanco), SDR (rojo) y NSD (naranja). Los efectos de la temperatura se pueden evitar considerando una cantidad de compresión más alta en el estado inicial separable.

condición de potencial atractivo se convertirá en:

$$2\lambda^3 - \lambda^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) + \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2 > 0 \quad (34)$$

Análogamente al caso abierto, una diagonalización analítica del Hamiltoniano resultará posible en casos especiales a través de ciertas relaciones entre parámetros. En este caso tendremos las tres condiciones equivalentes:

$$\omega_1 = \omega_2 \quad \text{ó} \quad \omega_2 = \omega_3 \quad \text{ó} \quad \omega_1 = \omega_3 \quad (35)$$

donde para cada uno de los tres casos obtendremos un automodo no acoplado al baño al baño térmico. Comparando los coeficientes de acoplamiento obtendremos una panorámica distinta al caso de la cadena cerrada (Fig.9) en la que las regiones donde existe separación de escalas (zonas blancas) se ajustan ahora a las nuevas condiciones (35).

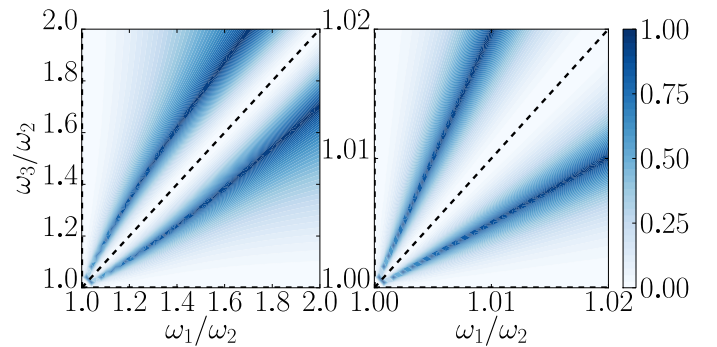


Figura 9. Cociente entre el cuadrado de los dos coeficientes de acoplamiento más próximos a cero ($\kappa_{min}^2/\kappa_{sig}^2$) para un acoplamiento de $\lambda = 0,4 \omega_2^2$. Las líneas de puntos representan los casos resonantes en los osciladores de los extremos (diagonal) y entre las otras dos parejas (eje de abscisas y ordenadas).

Analizando la forma de los autovectores de H_S para los casos particulares (35) obtenemos que su forma es equivalente al caso resonante en los osciladores de los extremos del caso abierto (Eq.(23)), donde se obtenía uno de los elementos de la matriz de cambio de base nulo ($f_{22} = 0$). Por ello en estos casos los operadores de uno de los osciladores (el no resonante) no dependen del automodo libre de disipación, haciendo que las parejas no resonantes nunca sincronicen y sus correlaciones cuánticas tampoco se vean conservadas asintóticamente, al contrario que las de la pareja sí resonante, como se puede observar en la Fig.10.

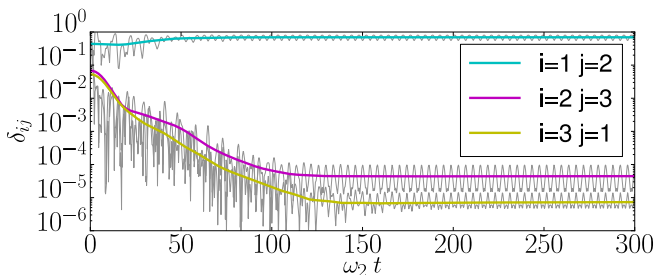


Figura 10. Evolución del discord para el caso en el que dos de los osciladores tienen frecuencias resonantes. Únicamente la pareja resonante mantiene sus correlaciones asintóticamente. Los parámetros utilizados son $\lambda = 0,4 \omega_2^2$, $\omega_1 = \omega_2$ y $\omega_3 = 1,8 \omega_2$.

No obstante al alejarnos de los casos (35), pero manteniéndonos en las zonas donde existe separación de escalas (zonas blancas Fig.9), tendremos que $f_{ij} \neq 0 \forall i, j \in \{1, \dots, N\}$. Consecuentemente se tiene que todas las parejas sincronizarán y el discord de todas alcanzará un “plateau” como en el caso de la cadena abierta. Al aumentar λ obtendremos zonas de separación de escalas más amplias, dando cabida a regiones donde emerge la sincronización entre todas las parejas.

Por último comentaremos brevemente el punto ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$) donde se harán nulos dos acoplamientos efectivos, a la par que se tendrá una degeneración en las autofrecuencias de los dos automodos no disipantes ($\Omega_{1,2} = \sqrt{\omega^2 - \lambda}$). Por tanto, a diferencia del punto de cruce entre las Eqs.(23) y (24) de la cadena abierta, en este caso sí existirá sincronización de todas las parejas.

IV. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO

En este trabajo hemos estudiado los aspectos cuánticos de la sincronización en osciladores armónicos disipativos acoplados. El estudio de dos osciladores, presentado en más detalle en la Ref.[1], nos ha servido para identificar las condiciones necesarias para la emergencia de sincronización relacionando la aparición de este fenómeno con las diferentes tasas de disipación presentes en el sistema debido a la interacción con un baño térmico común.

Estos resultados han sido la base para la extensión del estudio a cadenas de tres osciladores, cuya mayor complejidad da lugar a distintas propiedades dinámicas entre diferentes parejas de osciladores o comportamientos colectivos y permite analizar los efectos de las condiciones de contorno (cadenas abiertas o cerradas).

El análisis de la transición cuántico-clásica del sistema a través de la dinámica del discord, nos ha permitido relacionar la existencia de sincronización con la conservación de correlaciones en el sistema. Esta robustez frente a la decoherencia debida a la disipación se presenta en general como un decaimiento muy lento de las correlaciones cuánticas, siendo en algunos casos también posible alcanzar un estado estacionario diferente del térmico en el que se preservan y las oscilaciones se mantienen activas y sincronizadas. En este contexto hemos dado una expresión analítica del entrelazamiento (negatividad logarítmica) en el límite asintótico para frecuencias resonantes en los osciladores de los extremos de la cadena, obteniendo un diagrama de fases donde se observa que el entrelazamiento permanece robusto para altas temperaturas ($T \sim 100\omega_2$) dependiendo de la compresión del estado inicial.

El estudio formal de la dinámica y las propiedades del sistema se ha realizado mediante la generalización de la ecuación maestra de dos osciladores para el caso de cadenas abiertas y cerradas de N osciladores, en función de los automodos del sistema aislado. Mediante la aproximación de onda rotante efectuada, hemos identificado tasas de relajación efectivas para cada uno de los automodos (escalas de tiempo asociadas a la disipación de cada automodo) relacionándolas directamente con las componentes de la matriz de cambio de base f tanto para SB como CB. En este último caso esta dependencia recae en los acoplamientos efectivos, siendo buenos indicadores de la separación de escalas de disipación en virtud de la forma del Hamiltoniano de interacción sistema-baño.

La sincronización entre osciladores emerge únicamente cuando existe una separación de escalas entre la mínima y la siguiente tasa de relajación efectiva, es decir, cuando alguno de los automodos es capaz de permanecer activo un tiempo más largo que el resto. Esto producirá que todos los osciladores (si $f_{ij} \neq 0 \forall i, j \in \{1, \dots, N\}$) o determinadas parejas (en otro caso), adquieran la misma frecuencia ($2\Omega_i$). La separación de escalas también provoca que las correlaciones asociadas al automodo que mayor tiempo sobrevive activo (sin termalizar) alcancen un “plateau” decayendo lentamente.

Los métodos y herramientas desarrollados nos permiten extender el análisis efectuado en el caso de tres osciladores a sistemas compuestos por un número arbitrario de ellos. Resultaría notablemente interesante la generalización de las relaciones entre parámetros que provocan la anulación de alguno de los acoplamientos efectivos ($\kappa_i = 0$), especialmente en el caso de la relación hiperbólica (32) de la cadena abierta, que produce una sincronización colectiva y la conservación de correlaciones para todas las parejas de osciladores.

-
- [1] Gian Luca Giorgi, Fernando Galve, Gonzalo Manzano, Pere Colet and Roberta Zambrini, *Quantum Correlations and mutual synchronization* arXiv:1105.4129v2 [quant-ph] (2011).
- [2] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge University Press, 2001).
- [3] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering*, Westview Press (2001).
- [4] I. Goychuk, J. Casado-Pascual, M. Morillo, J. Lehmann and P. Hänggi, *Quantum Stochastic Synchronization* Phys. Rev. Lett. **97**, 210601 (2006).
- [5] O. V. Zhirov and D. L. Shepelyansky, *Quantum Synchronization*, Phys. Rev. Lett. **100**, 014101 (2008).
- [6] S-B. Shim, M. Imboden, P. Mohanty, *Synchronized Oscillation in Coupled Nanomechanical Oscillators*, Science, **316**, 95 (2007).
- [7] G. Heinrich, M. Ludwig, J. Qian, B. Kubala, and F. Marquardt, *Collective Dynamics in Optomechanical Arrays*, Phys. Rev. Lett. **107**, 043603 (2011).
- [8] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, *Quantum Entanglement*, Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).
- [9] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000).
- [10] G. Vidal and R. F. Werner, *Computable measure of entanglement*, Phys. Rev. A **65**, 032314 (2002).
- [11] G. Adesso, A. Serafini, F. Illuminati, *Quantification and Scaling of Multipartite Entanglement in Continuous Variable Systems*, Phys. Rev. Lett. **93**, 220504 (2004).
- [12] H. Ollivier and W. H. Zurek, *Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations*, Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2001).
- [13] L. Henderson and V. Vedral, *Classical, quantum and total correlations*, J. Phys. A **34**, 6899 (2001).
- [14] A. Datta, A. Shaji and C. M. Caves, *Quantum Discord and the Power of One Qubit*, Phys. Rev. Lett. **100**, 050502 (2008).
- [15] B. P. Lanyon, M. Barbieri, M. P. Almeida and A. G. White, *Experimental quantum computing without entanglement*, Phys. Rev. Lett. **101**, 200501 (2008).
- [16] D. Girolami and G. Adesso, *Quantum discord for general two-qubit states: Analytical progress*, Phys. Rev. A **83**, 052108 (2011).
- [17] F. Galve, G. L. Giorgi and R. Zambrini *Maximally discordant mixed states of two qubits* Phys. Rev. A **83**, 012102 (2011).
- [18] P. Giorda and M. G. A. Paris, *Gaussian Quantum Discord*, Phys. Rev. Lett. **105**, 020503 (2010).
- [19] G. Adesso and A. Datta, *Quantum versus classical correlations in Gaussian states*, Phys. Rev. Lett. **105**, 030501 (2010).
- [20] T. Rocheleau, T. Ndukum, C. Macklin, J. B. Hertzberg, A. A. Clerk and K. C. Schwab *Preparation and detection of a mechanical resonator near the ground state of motion*, Nature **463**, 72 (2010).
- [21] F. Marquardt and S. M. Girvin, *Optomechanics*, Physics **2**, 40 (2009).
- [22] D. Van Thourhout and J. Roels, *Optomechanical device actuation through the optical gradient force*, Nature Phot. **4** 211, (2010).
- [23] F. Marino F. S. Cataliotti, A. Farsi, M. S. de Cumis and F. Marin, *Classical Signature of Ponderomotive Squeezing in a Suspended Mirror Resonator*, Phys. Rev. Lett. **104**, 073601 (2010).
- [24] P. Verlot, A. Tavernarakis, T. Briant, P.-F. Cohadon and A. Heidmann, *Backaction Amplification and Quantum Limits in Optomechanical Measurements*, Phys. Rev. Lett. **104**, 133602 (2010).
- [25] K. R. Brown, C. Ospelkaus, Y. Colombe, A.C. Wilson, D. Leibfried, D. J. Wineland, *Coupled quantized mechanical oscillators*, Nature, **471**, 196 (2011).
- [26] M. Harlander, R. Lechner, M. Brownnutt, R. Blatt, and W. Hänsel, *Trapped-ion antennae for the transmission of quantum information*, Nature **471**, 200 (2011).
- [27] W. H. Zurek, *Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical*, Rev. Mod. Phys. **75**, 715 (2003).
- [28] G. Auletta, M. Fortunato, G. Parisi, *Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, New York 2009).
- [29] T. Brandes *Chapter 7 of UMIST-Bradford Lectures on Background to Quantum Information Theory*.
- [30] A. Rivas and S. F. Huelga, *Introduction to the Time Evolution of Open Quantum Systems*, arXiv:1104.5242v1 [quant-ph].
- [31] B. L. Hu, J. P. Paz and Y. Zhang, *Quantum Brownian motion in a general environment: Exact master equation with nonlocal dissipation and colored noise*, Phys. Rev. D **45**, 28432861 (1992).
- [32] H. P. Breuer and F. Petruccione, *The theory of open quantum systems* (Oxford University Press, Oxford, 2002).
- [33] D. A. Lidar, I. L. Chuang and K. B. Whaley, *Decoherence-free subspaces for quantum computation*, Phys. Rev. Lett. **81**, 25942597 (1998).
- [34] F. Benatti, R. Floreanini, M. Piani, *Environment Induced Entanglement in Markovian Dissipative Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **91**, 070402 (2003).
- [35] D. Braun, *Creation of Entanglement by Interaction with a Common Heat Bath* Phys. Rev. Lett. **89**, 277901 (2002).
- [36] C-H. Chou, T. Yu and B. L. Hu, *Exact master equation and quantum decoherence of two coupled harmonic oscillators in a general environment*, Phys. Rev. E **77**, 011112 (2008).
- [37] J. P. Paz and A. J. Roncaglia, *Dynamics of the entanglement between two oscillators in the same environment*, Phys. Rev. Lett. **100**, 220401 (2008); *Dynamical phases for the evolution of the entanglement between two oscillators coupled to the same environment*, Phys. Rev. A **79**, 032102 (2009).
- [38] T. Yu and J. H. Eberly, *Sudden death of entanglement*, Science **323**, 598 (2009).
- [39] F. Galve, G. L. Giorgi and R. Zambrini, *Entanglement dynamics of nonidentical oscillators under decohering environments*, Phys. Rev. A **81**, 062117 (2010).